IL TEOREMA DI WHITEHEAD

LUIGI CAPUTI

Prime definizioni

Per introdurre il teorema di Whitehead, nella sua versione classica, abbiamo bisogno di alcune definizioni preliminari, prime tra tutte la definizione di *gruppo di omotopia*.
Sia I^n il cubo unitario e ∂I^n il suo bordo; l'obiettivo è generalizzare la nozione di gruppo fondamentale per uno spazio topologico X di punto base x_0.

Definizione 1. Chiamiamo $\pi_n(X, x_0)$ l'insieme delle classi di omotopia di coppia di mappe $f\colon (I^n, \partial I^n) \to (X, x_0)$.

Ciò significa che una omotopia $F : (I^n, \partial I^n) \times [0,1] \to (X, x_0)$ tra F_0 ed F_1, deve essere tale che per ogni $t \in [0,1]$, $F_t(\partial I^n) = x_0$.
Come fatto per il gruppo fondamentale, introduciamo ora un prodotto tra gli elementi di $\pi_n(X, x_0)$ in modo da ottenere una struttura di gruppo. Per f, g due rappresentanti definiamo

$$(f * g)(s_1, \dots, s_n) = \begin{cases} f(2s_1, s_2, \dots, s_n) & \text{per } s_1 \leq \frac{1}{2} \\ g(2s_1 - 1, s_2, \dots, s_n) & \text{per } s_1 \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Tale operazione è ben definita; infatti, posto $f_0 \sim f_1$ e $g_0 \sim g_1$ di omotopie F e G, sia $H : I \times (I^n, \partial I^n) \to (X, x_0)$ tale che:

$$H(t, s_1, s_2, \dots, s_n) = \begin{cases} F(t, 2s_1, s_2, \dots, s_n) & \text{per } s_1 \leq \frac{1}{2} \\ G(t, 2s_1 - 1, s_2, \dots, s_n) & \text{per } s_1 \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Per costruzione di $f * g$ le coordinate $s_2, \dots, s_n$ restano fisse; quindi i risultati ottenuti per $\pi_1(X, x_0)$ si possono estendere, esattamente con le stesse dimostrazioni, al caso più generale di $\pi_n(X, x_0)$.
In particolare $\pi_n(X, x_0)$ è gruppo con identità data dalla mappa costante, e inverso $f^{-1}(s_1, \dots, s_n) = f(1 - s_1, s_2, \dots, s_n)$.

Osservazione 2. Le mappe $f\colon (I^n, \partial I^n) \to (X, x_0)$ sono equivalenti a mappe da (S^n, s_0) a (X, x_0), ottenute dalle prime collassando ∂I^n ad un punto.
Per definire un'operazione tra queste nuove applicazioni, procediamo come segue: data una sfera S^n, decomponiamola come unione di due dischi, D_+ e D_- tali che $D_+ \cap D_-$ sia il suo equatore. Scegliamo $s_0 \in S^{n-1} \simeq D_+ \cap D_-$ e collassiamo $D_+ \cap D_-$, che è omeomorfo a S^{n-1}, ad un punto. Abbiamo così definito una mappa

$\psi\colon S^n \to S_1^n \vee S_2^n$ nel bouquet di sfere, che manda l'equatore in s_0. Siano α, β due rappresentanti in $\pi_n(X, x_0)$, con $\alpha\colon (S^n, s_1) \to (X, x_0)$ e $\beta\colon (S^n, s_2) \to (X, x_0)$. Dopo aver identificato tramite omeomorfismo canonico (S_1^n, s_0) e (S_2^n, s_0) con i domini di definizione di α e β definiamo il loro prodotto come

$$\alpha * \beta = \begin{cases} \alpha\psi(x) & \text{per } x \in D_+ \\ \beta\psi(x) & \text{per } x \in D_- \end{cases}$$

La composizione non dipende nuovamente dalla classe di omotopia di α e β, e $\alpha\beta(s_0) = x_0$; dunque il prodotto $([\alpha], [\beta]) \to [\alpha * \beta]$ è ben definito e dà una struttura di gruppo equivalente alla precedente.

Abbiamo allora la seguente definizione, equivalente alla Definizione 1:

Definizione 3. Chiamiamo $\pi_n(X, x_0)$ l'insieme delle classi di omotopia di mappe $f\colon (S^n, s_0) \to (X, x_0)$.

Proposizione 4. *$\pi_n(X, x_0)$ è commutativo per $n \geq 2$.*

Dimostrazione. Consideriamo la struttura di gruppo per $\pi_n(X, x_0)$ data nella definizione precedente, e mostriamo che il prodotto $\alpha\beta$ è omotopo a $\beta\alpha$.
Sia S^n sfera unitaria immersa in $\mathbb{R}^{n+1}$ identificato dalle coordinate $x_0, \dots, x_n$, con la decomposizione $S^n = D_+ \cup D_-$, ed $s_0 = (0, 1, \dots, 0)$ un punto dell'equatore.
Consideriamo la rotazione ρ_ϕ di angolo $0 \leq \phi \leq \pi$ del piano generato da $\{x_0, x_2\}$ che lascia fisso il complementare, quindi anche s_0. Per $\phi = 0$ $\rho_0 = \mathbb{1}$ mentre per $\phi = \pi$ ρ_π scambia i dischi D_+ e D_- (sono stati identificati con l'insieme dei punti la cui prima coordinata è positiva o negativa). Quindi la famiglia di mappe continue ρ_ϕ determina una omotopia $R : [0, \pi] \times S^n \to X$ data da $R(\phi, x) = \alpha\beta(\rho_\phi(x))$ che ne scambia i domini; allora $R(0, x) = \alpha\beta(\rho_0(x)) = \alpha\beta(x)$ mentre $R(\pi, x) = \alpha\beta(\rho_\pi(x)) = \beta\alpha(x)$, ovvero la tesi. □

Notazione. Per la proposizione precedente $\pi_n(X, x_0)$ è commutativo, dunque il prodotto $\alpha * \beta$ sarà anche, più suggestivamente, indicato con $\alpha + \beta$.

Sia X c.p.a. e scegliamo x_0 e x_1 in X con $x_1 \neq x_0$; esiste $\gamma\colon I \to X$ cammino tale che $\gamma(0) = x_0$ e $\gamma(1) = x_1$, e consideriamo $f\colon (I^n, \partial I^n) \to (X, x_1)$ un rappresentante in $\pi_n(X, x_1)$.
Vorremmo associare ad f una mappa $\tilde{f}\colon (I^n, \partial I^n) \to (X, x_0)$. A questo scopo riscaliamo il dominio di f al sotto-cubo $\tilde{I}^n = [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]^n$ ed indichiamo con $\partial\tilde{I}^n$ il suo bordo. Preso $p \in \partial\tilde{I}^n$ possiamo considerare un cammino tra p ed un punto sul bordo di I^n su cui applicare γ; ad esempio sia r_p la semiretta uscente dall'origine passante per p e sia $\bar{p} = \partial I^n \cap r_p$. In questo modo associamo, bigettivamente, ad ogni punto del bordo di I^n un unico punto sul bordo di $\tilde{I}^n$; applicando γ al segmento tra $\bar{p}$ e p abbiamo una funzione $\gamma f\colon (I^n, \partial I^n) \to (X, x_0)$ che non dipende dalla classe di omotopia di γ o f e che per $n = 1$ coincide con $[i(\gamma) f \gamma]$.

Osservazione 5. Ad esempio, se $\gamma \sim \tilde{\gamma}$ di omotopia G relativa a ∂I, allora l'omotopia $\tilde{G}\colon I^n \times I \to I^n$ tale che $\tilde{G}|_{\tilde{I}^n} = \mathbb{1}$ e $\tilde{G}|_s = G$, dove s rappresenta il segmento tra p e $\bar{p}$ al variare di p in $\partial\tilde{I}^n$, è quella cercata tra γf e $\tilde{\gamma} f$.

Tra le proprietà di γf abbiamo, in notazione additiva:

(1) $\gamma(f+g) \sim \gamma f + \gamma g$
(2) $(\gamma * \eta)f \sim \gamma(\eta f)$
(3) $\mathbb{1}f \sim f$, con $\mathbb{1}$ cammino costante.

Unica proprietà non banale è data dalla (1); per dimostrarla deformiamo f e g in modo che siano costanti, di costante x_1, rispettivamente su $[\frac{1}{2}, 1] \times I^{n-1}$ e $[0, \frac{1}{2}] \times I^{n-1}$, e chiamiamo queste nuove applicazioni, omotope alle precedenti, $f+0$ e $0+g$. Diamo allora una omotopia H tra $\gamma(f+0) + \gamma(0+g)$ e $\gamma(f+g)$:

$$H_t(s_1, \ldots, s_n) = \begin{cases} \gamma(f+0)((2-t)s_1, s_2, \ldots, s_n) & s_1 \in [0, \frac{1}{2}] \\ \gamma(0+g)((2-t)s_1 + t - 1, s_2, \ldots, s_n) & s_1 \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Le proprietà elencate sopra ci permettono di costruire un omomorfismo di gruppi $\beta_\gamma\colon \pi_n(X, x_1) \to \pi_n(X, x_0)$ tale che $\beta_\gamma[f] = [\gamma f]$.
Infatti per (1) si ha $\beta_\gamma[f+g] = [\gamma(f+g)] = [\gamma f] + [\gamma g] = \beta_\gamma[f] + \beta_\gamma[g]$ mentre per (3) $\beta_{\mathbb{1}}[f] = \mathbb{1}[f] = [f]$, ovvero $\beta_{\mathbb{1}}$ è il morfismo identico; se $\bar{\gamma} = \gamma^{-1} = \gamma(1-s)$ abbiamo $\beta_{\bar{\gamma}}[f] = [\bar{\gamma} f]$, e quindi per (2) $\mathbb{1} = \beta_{\mathbb{1}} = \beta_{\gamma\bar{\gamma}} = \beta_\gamma \beta_{\bar{\gamma}}$ da cui otteniamo che β_γ è un isomorfismo. Abbiamo così dimostrato la seguente

Proposizione 6. *Se (X, x_0) è connesso per archi una scelta differente del punto base induce un isomorfismo tra i gruppi di omotopia.*

Nel caso specifico in cui γ è un elemento di $\pi_1(X, x_0)$, abbiamo un omomorfismo β:

$$\begin{array}{rccc} \beta\colon & \pi_1(X, x_0) & \longrightarrow & Aut(\pi_n(X, x_0)) \\ & \gamma & \longmapsto & \beta_\gamma \end{array}$$

Poiché $\beta_{\gamma\eta} = \beta_\gamma \beta_\eta$, β definisce un'azione di $\pi_1(X, x_0)$ su $\pi_n(X, x_0)$, che per $n = 1$ è azione di $\pi_1(X, x_0)$ su sé stesso per automorfismo interno, mentre per $n > 1$ rende il gruppo commutativo $\pi_n(X, x_0)$ un modulo su $\mathbb{Z}[\pi_1(X, x_0)]$. Quest'ultimo è un anello i cui elementi sono somme finite $\sum_i n_i \gamma_i$ con $n_i \in \mathbb{Z}$ e $\gamma_i \in \pi_1(X, x_0)$ e le operazioni sono invece date da:

- $\sum_i n_i \gamma_i + \sum_i m_i \gamma_i = \sum_i (n_i + m_i)\gamma_i$
- $(\sum_i n_i \gamma_i)(\sum_j m_j \gamma_j) = \sum_{i,j} n_i m_j \gamma_i \gamma_j$

e l'azione che rende $\pi_n(X, x_0)$ $\mathbb{Z}[\pi_1]$-modulo è definita da

$$(\sum_i n_i \gamma_i)\alpha = \sum_i n_i(\gamma_i \alpha) \text{ con } \alpha \in \pi_n(X, x_0)$$

Definizione 7. Uno spazio X è detto *abeliano* se l'azione descritta sopra è quella banale.

Osservazione 8. Un morfismo di spazi puntati $\varphi\colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$ induce in omotopia una mappa

$$\begin{array}{rccc} \varphi_*\colon & \pi_n(X, x_0) & \longrightarrow & \pi_n(Y, y_0) \\ & [f] & \longmapsto & [\varphi f] \end{array}$$

Se $f\colon X \to Y$ è una funzione continua, sappiamo infatti che $\alpha \sim \beta$ implica $f\alpha \sim f\beta$, quindi φ è ben definita; è un omomorfismo perché l'inverso di $f\alpha$ è $fi(\alpha)$ e $f(\alpha * \beta) \sim f\alpha * f\beta$.
Sono verificate inoltre le proprietà funtoriali $(\varphi\psi)_* = \varphi_*\psi_*$ e $\mathbb{1}_* = \mathbb{1}$. Infine se F_t è una omotopia di spazi puntati, si ha $F_0 \sim F_1$, e dunque $(F_0)_* = (F_1)_*$ in quanto $(F_0)_*[\alpha] = [F_0\alpha] = [F_1\alpha] = (F_1)_*[\alpha]$; in particolare una equivalenza omotopica induce isomorfismi in omotopia.

Una proprietà molto interessante dei gruppi di omotopia superiori al primo è legata ai rivestimenti; infatti si ha la seguente

Proposizione 9. *Un rivestimento* $p\colon (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ *induce un isomorfismo* $p_*\colon \pi_n(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to \pi_n(X, x_0)$ *per ogni* $n \geq 2$.

Dimostrazione. Sia f un rappresentante in $\pi_n(X, x_0)$; per il teorema del sollevamento di applicazioni, poiché $\pi_1(S^n, s_0)$ per $n \geq 2$ è banale, si ha il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd} & (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \arrow[d, "p"] \\ (S^n, s_0) \arrow[ur, dashed, "\tilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & (X, x_0) \end{tikzcd}$$

con $\tilde{f}$ sollevamento di f. La classe $[\tilde{f}]$ è tale che $p_*[\tilde{f}] = [p\tilde{f}] = [f]$, ovvero p_* è surgettiva.
Sia ora $\tilde{f}_0$ tale che $p_*[\tilde{f}] = f_0$ è omotopo alla mappa costante, con omotopia F. Per il teorema di sollevamento dell'omotopia F si solleva a omotopia $\tilde{F}$ tra $\tilde{f}_0$ e un sollevamento della mappa costante, che è ancora costante. Dunque p_* è anche iniettiva, ovvero un isomorfismo. $\square$

Esempio. Se X ammette rivestimento universale contraibile allora il gruppo di omotopia $\pi_n(X, x_0)$ è nullo per ogni $n \geq 2$.

Esempio. Il toro $\mathbb{T}^n$ ammette $\mathbb{R}^n$ come rivestimento, quindi ha tutti i gruppi di omotopia, ad eccezione del primo, nulli. Osserviamo che questo è in contrasto con i gruppi di omologia che invece sono non banali.

Definizione 10. Chiamiamo *asferici* gli spazi con gruppi di omotopia tutti nulli per $n \geq 2$.

Proposizione 11. *Per un prodotto* $\Pi_\alpha X_\alpha$ *di una collezione di spazi connessi per archi abbiamo gli isomorfismi* $\pi_n(\Pi_\alpha X_\alpha) \simeq \Pi_\alpha \pi_n(X_\alpha)$.

Dimostrazione. Una mappa $f : Y \to \Pi_\alpha X_\alpha$ si fattorizza per ogni indice ad $f_\alpha : Y \to X_\alpha$, da cui la tesi. $\square$

Omotopia relativa

Una generalizzazione dei gruppi di omotopia necessaria alla dimostrazione del teorema di Whitehead è data dai *gruppi di omotopia relativa.* Procediamo ora con la loro costruzione.
Sia I^{n-1} la faccia di I^n la cui ultima coordinata s_n sia nulla, e sia J^{n-1} la chiusura di $\partial I^n - I^{n-1}$, ovvero l'unione di tutte le restanti facce di I^n.

Definizione 12. Per una coppia (X, A) definiamo $\pi_n(X, A, x_0)$ come l'insieme delle classi di omotopia di applicazioni continue

$$f\colon (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \to (X, A, x_0)$$

con $f(\partial I^n) \subseteq A$, $f(J^{n-1}) = x_0$, dove l'omotopia deve essere dello stesso tipo.

La coordinata s_n di J^{n-1} gioca un ruolo speciale nella definizione e non può più essere usata nella definizione di prodotto. Ciò nonostante, ricordando di non poter utilizzare la variabile s_n per le operazioni di prodotto, con le stesse dimostrazioni fatte per il caso assoluto si ottengono risultati analoghi: $\pi_n(X, A, x_0)$ risulta essere un gruppo per $n \geq 2$ (con la stessa operazione per $\pi_n(X, x_0)$), abeliano per $n \geq 3$.
Osserviamo che collassando J^{n-1} ad un punto otteniamo, ancora in analogia col caso assoluto, una definizione equivalente di gruppo di omotopia relativo:

Definizione 13. Chiamiamo *gruppo di omotopia relativo* il gruppo $\pi_n(X, A, x_0)$ definito come l'insieme delle classi di equivalenza di mappe

$$f\colon (D^n, S^{n-1}, s_0) \to (X, A, x_0)$$

Il vantaggio di questa definizione risiede nel fatto che chiarisce meglio l'operazione di gruppo. Sia infatti ψ la mappa $D^n \to D^n_1 \vee D^n_2$ ottenuta collassando l'intersezione del disco con il piano $\{s_n = 0\}$, e sia s_0 appartenente a $\partial D^n \cap \{s_n = 0\}$.
Dopo aver identificato i domini di α e β con $(D^n_1, \partial D^n_1, \psi(s_0))$ e $(D^n_2, \partial D^n_2, \psi(s_0))$, definiamo il loro prodotto come

$$\alpha * \beta = \begin{cases} \alpha\psi(x) & \text{se } x \in D^n \cap \{s_n \geq 0\} \\ \beta\psi(x) & \text{se } x \in D^n \cap \{s_n \leq 0\} \end{cases}$$

dove pensiamo $D^n \subseteq \mathbb{R}^n$ di coordinate $\{s_1, \ldots, s_n\}$.
Tale prodotto è effettivamente un elemento di $\pi_n(X, A, x_0)$ in quanto $\alpha(s_0)$ e $\beta(s_0)$ danno x_0 e le immagini di ∂D^n_1 tramite α, e di ∂D^n_2 tramite β sono entrambe contenute in A.

Osservazione 14. Per $n = 1$ questo prodotto non è applicabile in quanto D^1 è dato dall'intervallo $[-1, 1]$, $\partial D^1 = \{-1, 1\}$ ed s_0 deve appartenere all'intersezione $\partial D^1 \cap \{s_1 = 0\} = \partial D^1 \cap \{0\}$ che è vuota.

Anche la commutatività già dimostrata nel caso assoluto si adatta ai gruppi relativi.

Per $n \geq 3$ infatti, possiamo fissare s_0 sul primo asse coordinato e ruotare l'iperpiano ortogonale ottenendo l'omotopia cercata.
Per $n = 2$ invece le rotazioni di D^2 lasciano come unico punto fisso il centro; le omotopie che richiediamo tuttavia sono tali che s_0 rimanga fisso, ovvero $s_0 = (0, 0)$ contro l'ipotesi che $s_0 \in S^1$; quindi $\pi_2(X, A, x_0)$ non è gruppo commutativo.

Proposizione 15 (Criterio di compressione)**.** *Una mappa f rappresenta la classe nulla in $\pi_n(X, A, x_0)$ se e solo se è omotopa, relativamente ad S^{n-1}, ad una mappa la cui immagine è interamente contenuta in A.*

Dimostrazione. Supponiamo che $f \sim g$ tale che $Im(g) \subseteq A$. Se R è una retrazione per deformazione del disco al punto s_0, allora componendo con g otteniamo una omotopia tra g e l'applicazione costante $\mathbb{1}_{x_0}$. Possiamo considerare, ad esempio, $R_t(x) = ts_0+(1-t)x$, da cui $gR\colon D^n \times I \to X$ è tale che $gR(x, t) = g(ts_0+(1-t)x)$. R lascia fisso s_0 e g ha immagine contenuta in A, con $g(s_0) = x_0$, dunque dà una equivalenza tra g e $\mathbb{1}_{x_0}$. Si ha quindi $[f] = [g] = [0]$.
Viceversa, se $[f] = 0$ con omotopia $F\colon D^n \times I \to X$, posso restringere quest'ultima ad una famiglia di n-dischi, iniziando da $D^n \times \{0\}$ e, progressivamente, considerare $D^n \times \{t\} \cup S^{n-1} \times [0, t]$, terminando con $D^n \times \{1\} \cup S^{n-1} \times I$.
Tutti questi dischi hanno lo stesso bordo S^{n-1}, dunque abbiamo una omotopia che lascia fisso S^{n-1}, tra f ed una mappa con immagine contenuta in A, data dalla restrizione di R a $D^n \times \{1\} \cup S^{n-1} \times I$. Ricordiamo infatti che le omotopie che consideriamo sono relative al bordo del disco, che per ipotesi ha immagine, tramite f, contenuta in A. $\square$

Come nel caso assoluto, $\varphi\colon (X, A, x_0) \to (Y, B, y_0)$ induce per $n \geq 2$ un omomorfismo di gruppi
$$\varphi_*\colon \pi_n(X, A, x_0) \to \pi_n(Y, B, y_0)$$
che è funtoriale.
Alle inclusioni $i\colon (A, x_0) \to (X, x_0)$ e $j\colon (X, x_0, x_0) \to (X, A, x_0)$, possiamo dunque associare gli omomorfismi i_* e j_* che danno luogo alla successione

$$\begin{array}{ccccccccc}
\ldots & \xrightarrow{i_*} & \pi_n(X, x_0) & \xrightarrow{j_*} & \pi_n(X, A, x_0) & \xrightarrow{\partial_*} & \pi_{n-1}(A, x_0) & \xrightarrow{i_*} & \ldots \\
\ldots & \xrightarrow{j_*} & \pi_1(X, A, x_0) & \xrightarrow{\partial_*} & \pi_0(A, x_0) & \xrightarrow{i_*} & \pi_0(X, x_0) & &
\end{array}$$

dove la mappa ∂_* viene dalla restrizione di $(I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \to (X, A, x_0)$ a I^{n-1}, oppure dalla restrizione di $(D^n, S^{n-1}, s_0) \to (X, A, x_0)$ a S^{n-1}, a seconda delle definizioni di omotopia relativa usate. Inoltre osserviamo che la successione finisce con il termine $\pi_0(X, x_0)$ perché non si è definito un π_0 relativo.

Osservazione 16. Se $A = x_0$ allora il gruppo relativo $\pi_n(X, A, x_0)$ si riduce a quello assoluto $\pi_n(X, x_0)$; dunque il caso assoluto può esser visto come caso particolare del caso relativo.

Teorema 17. *La successione è esatta.*

Dimostrazione. Più in generale possiamo dimostrare l'esattezza della successione della tripla (X, A, B, x_0) che si riconduce alla coppia per $B = x_0$.

$$\dots \xrightarrow{i_*} \pi_n(X, B, x_0) \xrightarrow{j_*} \pi_n(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial_*} \pi_{n-1}(A, B, x_0) \xrightarrow{i_*} \dots$$

che finisce, come osservato sopra, con il termine $\pi_1(X, A, x_0)$.
Puntualizziamo il fatto che alla fine della sequenza i π_1 relativi non hanno alcuna struttura di gruppo; l'esattezza ha però ancora senso in quanto l'immagine di una mappa è data dal *ker* della successiva, ovvero gli elementi mandati nella classe di omotopia della mappa costante.
Si hanno le seguenti inclusioni:

$Im(i_*) \subseteq Ker(j_*)$: $j_* i_* \colon \pi_n(A, B, x_0) \to \pi_n(X, A, x_0)$ ha immagine contenuta in A, quindi per il criterio di compressione è la mappa nulla.

$Ker(j_*) \subseteq Im(i_*)$: Sia f tale che $j_*[f] = [0]$.
Vista come mappa in $\pi_n(X, A, x_0)$ tramite l'inclusione, f è omotopa relativamente a ∂I^n ad una mappa con immagine in A per il criterio di compressione; quindi la classe $[f] \in \pi_n(X, B, x_0)$ è nell'immagine di i_*.

$Im(j_*) \subseteq Ker(\partial_*)$: La restrizione di una mappa tramite ∂_*, da $(I^n, \partial I^n, J^{n-1})$ in (X, B, x_0) ha immagine interamente contenuta in B, quindi rappresenta la classe nulla in $\pi_{n-1}(A, B, x_0)$.

$Ker(\partial_*) \subseteq Im(j_*)$: Se la restrizione tramite ∂_* di un rappresentante f è nulla in $\pi_{n-1}(A, B, x_0)$, allora f è omotopa relativamente a ∂I^{n-1} ad una mappa g con immagine contenuta in B. Sia F tale omotopia, di dominio $I^{n-1} \times I$; poiché $f(\partial I^{n-1}) = f(J^{n-1}) = x_0$, si ha che $F_t(\partial I^{n-1}) = x_0$ per ogni $t \in I$. Consideriamo allora la funzione $H \colon (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \to (X, B, x_0)$ definita sull'incollamento dei domini di f ed F lungo $f|_{I^{n-1}} = F_1$. Tale mappa vale $f(x)$ per i punti la cui ultima coordinata è minore o uguale a $\frac{1}{2}$, $F(x)$ altrimenti. Ma allora H è omotopa ad f in $\pi_n(X, A, x_0)$ con omotopia che incolla, progressivamente, il dominio di F al dominio di f. Quindi $[f] \in Im(j_*)$.

$Im(\partial_*) \subseteq Ker(i_*)$: Se f ha dominio I^{n+1} allora la restrizione tramite delta $f|_{I^n}$ è omotopa alla mappa costante con omotopia data dalla stessa f.

$Ker(i_*) \subseteq Im(\partial_*)$: Se B è un punto, poiché deve essere $x_0 \in B$, si ha $B = x_0$ e quindi ci si riduce ai gruppi di omotopia assoluti; in tal caso, se $f_0 = i_*(f)$ è omotopa alla mappa costante tramite omotopia $f_t \colon (I^n, \partial I^n) \to (X, x_0)$, allora quest'ultima dà una mappa $F \colon (I^{n+1}, \partial I^{n+1}, J^{n-1}) \to (X, A, x_0)$ la cui restrizione tramite ∂_* è f_0, quindi la tesi.

Per un generico B, sia F l'omotopia tra f e la mappa costante, e sia g la restrizione di F a $I^{n-1} \times I$, dove I^{n-1} è la faccia del dominio di f di coordinata s_n nulla. Riparametrizzando le coordinate s_n, s_{n+1} del dominio di F, possiamo incollare tra loro i domini di f e g ottenendo da F un'omotopia con la mappa costante. Come visto sopra l'incollamento dei domini di f e g non cambia la classe di omotopia di f, quindi $[f]$ è nell'immagine di delta.

□

Proprietà di estensione dell'omotopia

Supponiamo di avere una mappa $f_0 \colon X \to Y$ e un sottospazio $A \subseteq X$ su cui sia definita una omotopia $F : A \times I \to Y$ tale che $F_0 = f_0|_A$ che si vorrebbe estendere ad una omotopia definita su tutto X. Una coppia (X, A) per cui una tale estensione esiste sempre si dice avere la *proprietà di estensione dell'omotopia* abbreviata in *h.e.p.* (homotopy extension property).
Osserviamo che tale proprietà equivale a richiedere che ogni mappa F_0 definita su $X \times \{0\} \cup A \times I$ si estende a tutto $X \times I$, ovvero il seguente diagramma è commutativo:

$$\begin{tikzcd} X \times I \arrow[dr, dashed, "F"] & \\ X \times \{0\} \cup A \times I \arrow[u, hook, "\iota"] \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

Osservazione 18. Supponiamo che (X, A) abbia la *h.e.p.* e sia $\mathbb{1}$ l'identità su $X \times \{0\} \cup A \times I$. Allora questa si estende ad una mappa $\tilde{\mathbb{1}} \colon X \times I \to X \times \{0\} \cup A \times I$ che è ancora l'identità su $X \times \{0\} \cup A \times I$; dunque $X \times \{0\} \cup A \times I$ è un retratto di $X \times I$.
Viceversa, se $r \colon X \times I \to X \times \{0\} \cup A \times I$ è retrazione, allora, componendo con r, ogni mappa $X \times \{0\} \cup A \times I \to Y$ si può estendere a mappa $X \times I \to Y$. Resta da verificare la continuità di questa nuova mappa; ma ciò è facile se A è chiuso in X, perché in tal caso ogni coppia di mappe definite su $X \times \{0\}$ e $A \times I$, a valori in Y, tali che coincidano su $A \times \{0\}$, si combinano a mappa su $X \times \{0\} \cup A \times I$ a valori in Y, continua per il lemma di incollamento perché continua sui chiusi $A \times I$ e $X \times \{0\}$.

La proprietà di estensione dell'omotopia per una coppia (X, A), nel caso in cui A sia un chiuso in X, è equivalente dunque a richiedere che $X \times \{0\} \cup A \times I$ sia retratto di $X \times I$.
Per i nostri scopi considereremo coppie (X, A) di CW-complessi; per queste coppie tale equivalenza è vera in quanto un sottocomplesso cellulare A è sempre chiuso in X.

Proposizione 19. *Se (X, A) è coppia di CW-complessi, allora $X \times \{0\} \cup A \times I$ è retratto per deformazione di $X \times I$; quindi $X \times \{0\} \cup A \times I$ ha la* h.e.p.

Dimostrazione. Sia $r\colon D^n \times I \to D^n \times \{0\} \cup \partial D^n \times I$ una retrazione (ad esempio possiamo considerare la proiezione radiale dal punto $(0, 2)$); allora $r_t = tr + (1-t)\,\mathbb{1}$ dà una retrazione per deformazione di $D^n \times I$ su $D^n \times \{0\} \cup \partial D^n \times I$.
Poiché $X^n \times I$ è ottenuto da $X^n \times \{0\} \cup (X^{n-1} \cup A^n) \times I$ incollando copie di $D^n \times I$ lungo $D^n \times 0 \cup \partial D^n \times I$, abbiamo una retrazione per deformazione di $X^n \times I$ su $X^n \times \{0\} \cup (X^{n-1} \cup A^n) \times I$. Riscaliamo tale deformazione sull'intervallo $[\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n}]$ e indichiamola con R_n. Iterando per ogni n otteniamo una mappa R da $X \times I$ in $X \times \{0\} \cup A \times I$ tale che su ogni sottointervallo $[\frac{1}{2^{m+1}}, \frac{1}{2^m}]$ coincida con la retrazione R_m definita sull'm-scheletro di X.
Per la continuità in 0 di R osserviamo che R è continua su $X^n \times I$ in quanto costante sull'intervallo $[0, \frac{1}{2^{n+1}}]$, quindi concludiamo che è continua su tutto X perché continua su tutti gli n-scheletri. □

n-connessione e teorema di Whitehead

Poiché i CW-complessi sono dati per incollamento di mappe con dominio delle sfere, possiamo pensare che i gruppi di omotopia di tali spazi diano molte informazioni; è da questo assunto che parte il lavoro di Whitehead.
Prima di enunciare e dimostrare il suo teorema diamo però delle definizioni poi necessarie:

Definizione 20. Uno spazio X di punto base x_0 è detto *n-connesso* se $\pi_i(X, x_0)$ è nullo per ogni $i \leq n$.

Poiché n-connesso implica 0-connesso, ovvero connesso per archi, e la scelta di un punto base diverso da x_0 induce per mezzo di β_γ un isomorfismo in omotopia, la definizione di n-connessione può essere data senza menzionare il punto base.
Le seguenti condizioni sono equivalenti a quella di n-connessione:

- Ogni mappa $S^i \to X$ è omotopa alla mappa costante per $i \leq n$;
- Ogni mappa $S^i \to X$ si estende ad una mappa sul disco per $i \leq n$;
- $\pi_i(X, x_0) = 0$ per ogni $x_0 \in X$ e per $i \leq n$.

Per il caso relativo, grazie al criterio di compressione, si hanno le seguenti, equivalenti per $i > 0$:

(1) Ogni mappa $(D^i, \partial D^i) \to (X, A)$ è omotopa relativamente a ∂D^i ad una mappa $D^i \to A$;
(2) Ogni mappa $(D^i, \partial D^i) \to (X, A)$ è omotopa tramite omotopia dello stesso tipo ad una mappa $D^i \to A$;
(3) Ogni mappa $(D^i, \partial D^i) \to (X, A)$ è omotopa tramite omotopia dello stesso tipo ad una mappa costante $D^i \to A$;
(4) $\pi_i(X, A, x_0) = 0$ per ogni $x_0 \in A$.

La (4) segue dal fatto che anche nel caso relativo si può definire un isomorfismo di cambiamento punto base β_γ.
Per $i = 0$ le condizioni (1)-(3) sono equivalenti a dire che ogni componente connessa per archi di X contiene punti in A, in quanto D^0 è un punto, mentre per l'equivalenza con (4) non abbiamo una definizione di π_0 relativo.

Definizione 21. Diciamo che la coppia (X, A) è *n-connessa* se (1)-(4) valgono per $0 < i \leq n$ e (1)-(3) per $i = 0$.

Definizione 22. Chiamiamo *mapping cylinder* M_f di una mappa f tra X e Y lo spazio ottenuto da Y incollando $X \times I$ lungo $X \times \{1\}$ tramite f, ovvero

$$M_f = (Y \sqcup X \times I)/_\sim$$

dove $(x, 1) \sim f(x)$.

Lemma 23 (Lemma di compressione)**.** *Sia (X, A) una coppia di CW-complessi e (Y, B) una coppia tale che $B \neq \emptyset$. Supponiamo che per ogni n per cui $X - A$ ammette n-celle, $\pi_n(Y, B, y_0) = 0$ per ogni $y_0 \in B$ (per $n = 0$ supponiamo che la coppia (Y, B) sia 0-connessa).*
Allora ogni mappa $f\colon (X, A) \to (Y, B)$ è omotopa relativamente ad A ad una mappa $X \to B$.

Dimostrazione. Supponiamo induttivamente su k di avere una omotopia (rel A) tra f ed una mappa definita su X^{k-1} con immagine in B.
Se ϕ è la mappa caratteristica di una cella e^k di $X - A$, consideriamo la composizione

$$(D^k, \partial D^k) \xrightarrow{\ \phi\ } (X^k, X^{k-1}) \xrightarrow{\ f\ } (Y, B)$$

Per $k = 0$ la coppia (Y, B) è 0-connessa, quindi ogni mappa $(D^0, \partial D^0) \to (Y, B)$ è omotopa ad una mappa $D^0 \to B$; per $k \neq 0$ per ipotesi $\pi_k(Y, B, y_0) = 0$ per ogni y_0, quindi $f\phi$ rappresenta la classe nulla, e per il criterio di compressione è omotopa rel(∂D^k) ad una mappa con immagine in B. In ambo i casi tale omotopia si estende allo spazio quoziente $X^{k-1} \cup e^k \simeq (X^{k-1} \sqcup D^k)/\sim$.
Iterando per ogni k-cella di $X - A$ e prendendo l'identità su A, otteniamo dunque una omotopia di $f|_{X^k \cup A}$ con una mappa la cui immagine è interamente contenuta in B.
Per la proprietà di estensione dell'omotopia dei CW-complessi, dimostrata nella proposizione (19), questa si estende ad una omotopia definita su tutto X, concludendo il passo induttivo.
Se le celle di $X - A$ hanno dimensione limitata la tesi è provata per induzione, altrimenti restringiamo la k-esima omotopia relativa al k-scheletro, all'intervallo $[1 - 1/2^k, 1 - 1/2^{k+1}]$ ottenendo la tesi per incollamento (la continuità è analoga alla proposizione (19)). $\square$

Teorema 24 (Teorema di Whitehead)**.** *Siano X, Y CW-complessi. Se esiste $f\colon X \to Y$ per cui l'omomorfismo f_* indotto in omotopia sia un isomorfismo per ogni n, allora f è una equivalenza omotopica.*
Nel caso particolare in cui f è l'inclusione di X in Y come sottocomplesso, allora X risulta essere un retratto per deformazione di Y.

Dimostrazione. Supponiamo prima che f sia l'inclusione di un sottocomplesso, e consideriamo la successione esatta lunga della coppia (Y, X):

$$\dots \xrightarrow{i_*} \pi_n(Y, x_0) \xrightarrow{j_*} \pi_n(Y, X, x_0) \xrightarrow{\partial_*} \pi_{n-1}(X, x_0) \xrightarrow{i_*} \dots$$

Poiché i induce per ogni indice isomorfismi in omotopia, dalla successione esatta si ha che i $\pi_n(Y, X, x_0)$ sono tutti nulli.
Applichiamo allora il lemma di compressione all'identità di (Y, X); infatti $X \neq \emptyset$ e per ogni n i gruppi di omotopia sono nulli, quindi l'identità è omotopa relativamente a X ad una mappa $Y \to X$ che è una retrazione, dunque X è retratto per deformazione di Y.
Per il caso generale consideriamo il mapping cylinder M_f; questo contiene infatti $X = X \times \{0\}$, sia Y come sottospazi, e si deforma su Y. Possiamo dunque vedere f come la composizione dell'inclusione $X \to M_f$ e della retrazione $M_f \to Y$.
Poiché questa retrazione è una equivalenza omotopica, è sufficiente mostrare che M_f si deforma su X, se f induce isomorfismi in omotopia, o equivalentemente, se i gruppi relativi $\pi_n(M_f, X)$ sono tutti nulli.
Se la mappa f è cellulare, allora (M_f, X) è coppia di CW-complessi e per la prima parte della dimostrazione X risulta retratto per deformazione di M_f.
Se f non è cellulare, dal teorema di approssimazione cellulare sappiamo esistere una mappa $g\colon X \to Y$ che sia omotopa ad f. Dunque X è ancora retratto per deformazione di M_f e la dimostrazione è conclusa. $\square$